**Транспортная задача**.  
Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17 | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26 | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4 | 22 | 3 | 1 | 10 |
| A4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 4 + 6 + 10 + 10 = 30  
∑b = 7 + 7 + 7 + 7 + 2 = 30  
Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

**Этап 1. Поиск первого опорного плана**.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13[1] | 4 | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[3] | 1[7] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

опорный план является допустимым, так как все запасы исчерпаны, все потребности магазинов удовлетворены

2. m + n - 1 = 8.  
Значение целевой функции опорного плана равно:  
F(x) = 16\*3 + 17\*1 + 26\*6 + 13\*1 + 3\*7 + 1\*2 + 2\*3 + 1\*7 = 270

**Этап 2. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 16; 0 + v1 = 16; v1 = 16  
u3 + v1 = 13; 16 + u3 = 13; u3 = -3  
u3 + v4 = 3; -3 + v4 = 3; v4 = 6  
u3 + v5 = 1; -3 + v5 = 1; v5 = 4  
u4 + v1 = 2; 16 + u4 = 2; u4 = -14  
u4 + v2 = 1; -14 + v2 = 1; v2 = 15  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=16 | v2=15 | v3=17 | v4=6 | v5=4 |
| u1=0 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 |
| u3=-3 | 13[1] | 4 | 22 | 3[7] | 1[2] |
| u4=-14 | 2[3] | 1[7] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;1): 9 + 16 > 20; ∆21 = 9 + 16 - 20 = 5 > 0  
(2;4): 9 + 6 > 9; ∆24 = 9 + 6 - 9 = 6 > 0  
(3;2): -3 + 15 > 4; ∆32 = -3 + 15 - 4 = 8 > 0  
max(5,6,8) = 8  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;2): 4  
Для этого в перспективную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| 2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| 3 |  |  | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| 4 |  |  | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (3,2 → 3,1 → 4,1 → 4,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (3, 1) = 1. Прибавляем 1 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 1 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4[1] | 22 | 3[7] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[4] | 1[6] | 5 | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 16; 0 + v1 = 16; v1 = 16  
u4 + v1 = 2; 16 + u4 = 2; u4 = -14  
u4 + v2 = 1; -14 + v2 = 1; v2 = 15  
u3 + v2 = 4; 15 + u3 = 4; u3 = -11  
u3 + v4 = 3; -11 + v4 = 3; v4 = 14  
u3 + v5 = 1; -11 + v5 = 1; v5 = 12  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=16 | v2=15 | v3=17 | v4=14 | v5=12 |
| u1=0 | 16[3] | 30 | 17[1] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[6] | 9 | 23 |
| u3=-11 | 13 | 4[1] | 22 | 3[7] | 1[2] |
| u4=-14 | 2[4] | 1[6] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;4): 0 + 14 > 10; ∆14 = 0 + 14 - 10 = 4 > 0  
(2;1): 9 + 16 > 20; ∆21 = 9 + 16 - 20 = 5 > 0  
(2;4): 9 + 14 > 9; ∆24 = 9 + 14 - 9 = 14 > 0  
max(4,5,14) = 14  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;4): 9  
Для этого в перспективную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| Потребности |  |  |  |  |  |  |

Цикл приведен в таблице (2,4 → 2,3 → 1,3 → 1,1 → 4,1 → 4,2 → 3,2 → 3,4).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 1) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | | B3 | | B4 | | B5 | Запасы | |
| A1 | 16 | | 30 | | 17[4] | | 10 | | 16 | 4 | |
| A2 | 20 | | 27 | | 26[3] | | 9[3] | | 23 | 6 | |
| A3 | 13 | | 4[4] | | 22 | | 3[4] | | 1[2] | 10 | |
| A4 | 2[7] | | 1[3] | | 5 | | 4 | | 24 | 10 | |
| Потребности | 7 | | 7 | | 7 | | 7 | | 2 |  | |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9  
u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0  
u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3  
u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1  
u4 + v2 = 1; 1 + u4 = 1; u4 = 0  
u4 + v1 = 2; 0 + v1 = 2; v1 = 2  
u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=2 | v2=1 | v3=17 | v4=0 | v5=-2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[3] | 9[3] | 23 |
| u3=3 | 13 | 4[4] | 22 | 3[4] | 1[2] |
| u4=0 | 2[7] | 1[3] | 5 | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(4;3): 0 + 17 > 5; ∆43 = 0 + 17 - 5 = 12 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;3): 5  
Для этого в перспективную клетку (4;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |
| Потребности |  |  |  |  |  |  |

Цикл приведен в таблице (4,3 → 4,2 → 3,2 → 3,4 → 2,4 → 2,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е.

у = min (4, 2) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26[0] | 9[6] | 23 | 6 |
| A3 | 13 | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9  
u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0  
u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3  
u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1  
u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2  
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12  
u4 + v1 = 2; -12 + v1 = 2; v1 = 14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=1 | v3=17 | v4=0 | v5=-2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=9 | 20 | 27 | 26[0] | 9[6] | 23 |
| u3=3 | 13 | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] |
| u4=-12 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;1): 9 + 14 > 20; ∆21 = 9 + 14 - 20 = 3 > 0  
(3;1): 3 + 14 > 13; ∆31 = 3 + 14 - 13 = 4 > 0  
max(3,4) = 4  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 13  
Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Запасы |
| 1 |  |  |  |  | 16 | 4 |
| 2 |  |  |  |  | 23 | 6 |
| 3 |  |  |  |  | 1[2] | 10 |
| 4 |  |  |  |  | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,4 → 2,4 → 2,3 → 4,3 → 4,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | Запасы |
| A1 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 | 4 |
| A2 | 20 | 27 | 26 | 9[6] | 23 | 6 |
| A3 | 13[0] | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] | 10 |
| A4 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 | 10 |
| Потребности | 7 | 7 | 7 | 7 | 2 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12  
u4 + v1 = 2; -12 + v1 = 2; v1 = 14  
u3 + v1 = 13; 14 + u3 = 13; u3 = -1  
u3 + v2 = 4; -1 + v2 = 4; v2 = 5  
u3 + v4 = 3; -1 + v4 = 3; v4 = 4  
u2 + v4 = 9; 4 + u2 = 9; u2 = 5  
u3 + v5 = 1; -1 + v5 = 1; v5 = 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=5 | v3=17 | v4=4 | v5=2 |
| u1=0 | 16 | 30 | 17[4] | 10 | 16 |
| u2=5 | 20 | 27 | 26 | 9[6] | 23 |
| u3=-1 | 13[0] | 4[7] | 22 | 3[1] | 1[2] |
| u4=-12 | 2[7] | 1 | 5[3] | 4 | 24 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 17\*4 + 9\*6 + 4\*7 + 3\*1 + 1\*2 + 2\*7 + 5\*3 = 184